Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 - 3x + a$, onde a é um número real.

a) No caso em que $p(1) = 0$, determine os valores de x para os quais a matriz A abaixo não é invertível.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a & 3 & x \end{bmatrix}$$

b) Seja b um número real não nulo e i a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. Se o número complexo $z = 2 + bi$ é uma raiz de $p(x)$, determine o valor de $|z|$.

a) Se $p(1) = 0$, temos $1^3 + 3.1 + a = 0 \rightarrow a = 2$.

Sendo a matriz A não invertível, devemos ter detA = 0

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a & 3 & x \end{bmatrix} \rightarrow x^3 + 2 - 3x = 0$$

$(x^3 – x^2) + (x^2 – 3x + 2) = 0$
$x^2.(x – 1) + (x – 1)(x – 2) = 0 \rightarrow (x – 1)(x^2 + x – 2) = 0$
$(x – 1)(x – 1)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 1$(raiz dupla) ou $x = 2$.

Resposta: A matriz A é não invertível para x = -2 ou x = 1.

b) Sejam z, $\bar{z}$ e $x_0 \in R$ as raízes de p(x).
Temos que $z + \bar{z} + x_0 = 0 \leftrightarrow (2 + bi) + (2 – bi) + x_0 = 0$
Logo $x_0 = -4$.

Calculando o valor de “a”:
$(-4)^3 – 3.(-4) + a = 0 \leftrightarrow -64 + 12 + a = 0 \leftrightarrow a = 52$
Então $p(x) = x^3 – 3x + 52$, $\forall x \in R$. O produto das raízes de p(x) é dado por $z \cdot \bar{z} \cdot(-4) = -52 \rightarrow z\cdot \bar{z}. = 13$
Mas $z \cdot \bar{z}. = |z|^2$. Portanto $|z| = \sqrt{13}$.